

# Opgaven Hilbert-ruimten en kwantummechanica (2006)

Altijd: Opgave 1 is om te oefenen (niet om in te leveren), Opgave 2 is de inleveropgave, Opgave 3 is de bonusopgave (inleveren niet verplicht maar wel voordelig - zie tentamenregeling). Uiteraard kan je op het werkcollege vragen stellen over alle opgaven.

Voorlopige tentamenregeling: helft van het cijfer uit werkcollege, andere helft uit mondeling of schriftelijk tentamen of eindopdracht (mini-essay).

Zonder tegenbericht zijn alle vector-ruimten (en dus ook alle Hilbert-ruimten) gedefinieerd over  $\mathbb{C}$ .

## Week 1: Genormeerde ruimten en Hilbert-ruimten (15 september)

- (a) Bekijk de definitie van een Hilbert-ruimte  $H$  (uit college of syllabus) en bewijs de Cauchy-Schwarz ongelijkheid

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|. \quad (1)$$

Hier is

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}. \quad (2)$$

- (b) Welke delen van de definitie van een Hilbert-ruimte worden *niet* gebruikt in de afleiding van (1)?
2. De **Stelling van Jordan en von Neumann** luidt: *Een norm  $\|\cdot\|$  op een vector-ruimte is afkomstig van een inproduct via (2) desda*

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2). \quad (3)$$

*In dat geval geldt:*

$$(f, g) = \frac{1}{4} (\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f - ig\|^2 - i\|f + ig\|^2). \quad (4)$$

- Bekijk eerst als opwarmer de definitie van een norm en gebruik (1) om te laten zien dat  $\|\cdot\|$  inderdaad een norm op  $H$  definieert.
- Bewijs dan uit de definitie van het inproduct dat (3) en (4) uit (2) volgen. Dit geeft één kant van de stelling.
- Bewijs dan een aantal stappen van de omgekeerde richting: als (4) het linkerlid definieert, dan voldoet dit aan alle eisen voor het inproduct. Toon eerst aan dat  $(f, f) \geq 0$ , dan dat  $(g, f) = \overline{(f, g)}$ , en ten slotte dat  $(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0$ .

3. Nu maak je het bewijs af.

- (a) Toon eerst aan dat  $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$ . Dit moet je slim aanpakken.
- (b) Bewijs vervolgens dat  $(f, tg) = t(f, g)$  voor alle  $t \in \mathbb{C}$ . Doe dit eerst voor  $t = 2$ , dan voor  $t = n \in \mathbb{N}$ , dan voor  $t \in \mathbb{Z}$ , dan voor  $t \in \mathbb{Q}$ . Gebruik dan zonder bewijs dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f, t_n g) = (f, (\lim_{n \rightarrow \infty} t_n)g)$  om over te gaan naar  $t \in \mathbb{R}$ . Dan weer makkelijk: toon aan dat  $(f, ig) = i(f, g)$  en combineer uiteindelijk alles tot  $t \in \mathbb{C}$ .

## Week 2: Volledigheid (21-22 september)

1. Bekijk de vector-ruimte  $V = C([0, 1], \mathbb{C})$  met norm

$$\|f\|^2 = \int_0^1 dx |f(x)|^2.$$

Laat zien dat  $V$  niet volledig is. Hint: laat zien dat de rij functies

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & (x \leq 1/2) \\ n(x - 1/2) & (1/2 \leq x \leq 1/2 + 1/n) \\ 1 & (x \geq 1/2 + 1/n) \end{cases}$$

een Cauchy-rij is m.b.t. de norm  $\|\cdot\|$  maar dat die rij geen limiet heeft in  $V$ . Wat is de limiet?

2. Laat  $V$  een vector-ruimte zijn met norm  $\|\cdot\|$ , met (formele) completering

$$\tilde{V} := \{\text{Cauchy-rijen } (f_n) \text{ in } V\} / \sim,$$

waarbij  $(f_n) \sim (g_n)$  desda  $\lim_k \|f_k - g_k\| = 0$ .

- Geef natuurlijke operaties waaronder  $\tilde{V}$  een vector-ruimte is (gedaan op college).
- Laat zien dat  $\lim_k \|f_k\|$  bestaat (ook als de Cauchy-rij  $(f_n)$  geen limiet heeft in  $V$ ).
- Stel dat de norm in  $V$  van een inproduct  $(\cdot, \cdot)$  komt. Laat zien dat  $\lim_k (f_k, g_k)$  bestaat (ook als de Cauchy-rijen  $(f_n)$  en  $(g_n)$  geen limiet hebben in  $V$ ).
- Geef een injective afbeelding  $V \xrightarrow{\iota} \tilde{V}$  met de eigenschap dat  $\|\iota(v)\|_{\sim} = \|v\|$  voor alle  $v \in V$ , waarbij

$$\|[f_n]\|_{\sim} := \lim_k \|f_k\|.$$

(gedaan op college).

- Gebruik (c) om naast deze norm ook het inproduct in  $\tilde{V}$  te definiëren. (gedaan op college).
  - Laat zien dat de ruimte  $\ell_c(\mathbb{N})$ , bestaande uit eindige rijtjes ofwel uit functies  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  die slechts in eindig veel punten niet nul zijn, niet volledig is in de norm  $\|f\|^2 := \sum_k |f(k)|^2$  (aangeduid op college).
  - Geef een unitaire transformatie tussen de formele completering  $\widetilde{\ell_c(\mathbb{N})}$  van  $\ell_c(\mathbb{N})$  en de ruimte  $\ell^2(\mathbb{N})$  van alle functies  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  die voldoen aan de eis  $\|f\|^2 := \sum_k |f(k)|^2 < \infty$ .
3. (a) Laat zien dat  $\tilde{V}$  uit de vorige opgave volledig is in de norm  $\|\cdot\|_{\sim}$ .  
 (b) Bewijs zonder (a) te gebruiken direct dat  $\ell^2(\mathbb{N})$  volledig is in de gegeven norm.

### Week 3: $\ell^2$ en $L^2$ (29 september)

1. (a) Bewijs dat  $\ell^\infty$  volledig is in de norm  $\|\cdot\|_\infty$ .  
(b) Bewijs dat  $C(\Omega)$  volledig is in de norm  $\|\cdot\|_\infty$  als  $\Omega$  compact is (zie Analyse 3).  
(c) Bewijs dat als  $\|f_n - h_n\|_2 \leq 2^{-n}$  for all  $n$  en  $(f_n)$  is Cauchy, dan is ook  $(h_n)$  Cauchy (zie syllabus).
2. Deze opgave legt het verband tussen de normen  $\|\cdot\|_2$  en  $\|\cdot\|_\infty$  in het kader van Hilbert-ruimten.

- (a) Stel  $\varphi \in \ell^\infty$  en  $f \in \ell^2$ .
  - i. Bewijs dat  $\varphi f \in \ell^2$  (waar  $\varphi f$  het puntsgewijze product is van  $\varphi$  en  $f$  gezien als functies  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , i.e.  $(\varphi f)(k) := \varphi(k)f(k)$ ).
  - ii. Definieer de uitdrukking

$$\|\varphi\| := \sup\{\|\varphi f\|_2 \mid f \in \ell^2, \|f\|_2 = 1\}. \quad (5)$$

Bewijs dat  $\|\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ .

- (b) Stel  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  is compact en  $\varphi \in C(\Omega)$  en  $f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ .
  - i. Bewijs dat  $\varphi f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  (waar  $(\varphi f)(x) := \varphi(x)f(x)$ ).
  - ii. Definieer

$$\|\varphi\| := \sup\{\|\varphi f\|_2 \mid f \in \mathcal{L}^2(\Omega), \|f\|_2 = 1\}. \quad (6)$$

Bewijs dat  $\|\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ .

3. (a) Stel dat een reeks  $(f_n)$  in  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  voldoet aan  $\lim_n \|f_n\|_2 = 0$ . Geldt dan  $\lim_n f_n(x) = 0$  voor bijna alle  $x$  (i.e. buiten een verzameling van maat 0)?  
(b) Stel dat een reeks  $(f_n)$  in  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  voldoet aan  $\lim_n f_n(x) = 0$  voor bijna alle  $x$ . Geldt dan  $\lim_n \|f_n\|_2 = 0$ ?

## Week 4: Orthogonaliteit (6 oktober)

1. (a) Bewijs dat een deelruimte van een eindig-dimensionale Hilbert-ruimte gesloten is.  
(b) Bewijs Proposition II.9 in the (nieuwe) syllabus.
2. Stel dat  $H$  een separabele Hilbert-ruimte is.
  - (a) Bewijs dat als  $v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e_k$  (in de zin uitgelegd in de syllabus), dan  $v_k = (e_k, v)$  en  $\sum_k |(e_k, v)|^2 = \|v\|^2$  (dus precies als in het eindig-dimensionale geval).
  - (b) Leid hieruit af dat als  $(e_k)$  een o.n.b. is, de som  $\sum_{k=1}^{\infty} v_k e_k$  convergeert desda  $\sum_k |v_k|^2 < \infty$ .
  - (c) Laat zien dat voor een separabele Hilbert-ruimte de definitie van een o.n.b. in the syllabus equivalent is met de volgende: *een aftelbare orthonormale verzameling vectoren  $\{e_1, e_2, \dots\}$  in  $H$  is een o.n.b. als er geen andere orthonormale verzameling vectoren in  $H$  bestaat die  $\{e_1, e_2, \dots\}$  als echte deelverzameling heeft.*
  - (d) Laat zien dat alle oneindig-dimensionale separabele Hilbert-ruimten isomorf zijn.
3. Ontwikkel een juist concept van een o.n.b. in een willekeurige Hilbert-ruimte (kijk eens in een boek in de bieb...)

## Week 5: Operatoren (13 oktober)

1. (a) Laat  $(e_k)$  een o.n.b. zijn van een oneindig-dimensionale separabele Hilbert-ruimte  $H$  en stel dat  $f, g \in H$ . Bewijs dat

$$\sum_k (f, e_k)(e_k, g) = (f, g).$$

- (b) Stel  $a : H_1 \rightarrow H_2$  is een operator. Laat zien dat met de definitie

$$\|a\| := \sup \{ \|av\|_{H_2}, v \in H_1, \|v\|_{H_1} = 1 \}, \quad (7)$$

in het geval dat  $\|a\| < \infty$  volgt dat

$$\|a\| = \inf \{ C \geq 0 \mid \|av\|_{H_2} \leq C\|v\|_{H_1} \forall v \in H_1 \}. \quad (8)$$

- (c) Probeer Theorem III.2 te bewijzen zonder in de syllabus te kijken.

2. (a) Neem  $\hat{a} \notin \ell^\infty$  en de bijbehorende vermenigvuldigingsoperator  $a : \ell_c \rightarrow \ell^2$ , gedefinieerd door  $af = \hat{a}f$ . Laat zien dat  $\|a\|_{\ell_c} = \infty$  desda  $\hat{a} \notin \ell^\infty$ .

- (b) De zogenaamde positie-operator  $x$  uit de kwantummechanica is gedefinieerd van  $D = C_c(\mathbb{R})$  naar  $H = L^2(\mathbb{R})$  door  $(xf)(x) = xf(x)$  (i.e.  $x$  is de vermenigvuldigingsoperator horende bij de functie  $\hat{a}(x) = x$  op  $\mathbb{R}$ ). Laat zien dat  $\|x\|_{C_c(\mathbb{R})} = \infty$ .

- (c) Bewijs Proposition III.3.

3. Kies uit de volgende twee opgaven:

- (a) Beschouw een operator  $a : H_1 \rightarrow H_2$  als een afbeelding tussen  $H_1$  en  $H_2$  als topologische ruimten (zie syllabus) en bewijs dat  $a$  continu is in de topologische zin desda  $a$  begrensd is.
- (b) Bewijs in detail dat de norm van een matrix  $a$  gelijk is aan de wortel van de grootste eigenwaarde van  $a * a$  (waar  $a^*$  de hermitisch geconjugeerde van  $a$  is, i.e.  $(a^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$ ).

## Week 6: De geadjungeerde (27 oktober)

1. (a) Bewijs dat  $\|p\| = 1$  voor een projectie.  
(b) Bewijs dat  $\|u\| = 1$  voor een unitaire operator.  
(c) Bedenk een voorbeeld van een onbegrensde functionaal  $\varphi : D \subset H \rightarrow \mathbb{C}$  (bijvoorbeeld op  $\ell_c \subset \ell^2$ ).
2. (a) Bewijs dat voor een gegeven basis  $(e_k)$  van een gesloten deelruimte  $K$  van een Hilbert-ruimte  $H$  de som  $\sum_k (e_k, f)e_k$  voor iedere  $f \in H$  convergeert (zie (III.18) in de syllabus).  
(b) Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de som in (III.18) uit de syllabus, te weten

$$p : f \mapsto \sum_k (e_k, f)e_k \quad (9)$$

i.h.a *niet* convergeert in de operator-norm (III.3). Hint: neem  $p = 1$  (i.e. de projectie op  $K = H$ ), kies een o.n.b.  $(e_k)$  in  $H$  en toon aan dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^n (e_k, f)e_k - f \right\|_H, f \in H, \|f\|_H = 1 \right\} \neq 0.$$

N.B. Voor *gegeven*  $f$  geldt uiteraard dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n (e_k, f)e_k - f \right\|_H = 0.$$

- (c) Bewijs dat de operator (III.18) ofwel (9) niet van de keuze van de basis in  $K$  afhangt.
  - (d) Bewijs dat voor iedere begrensde operator  $a : H \rightarrow H$  geldt  $\|a^*\| = \|a\|$  en  $\|a^*a\| = \|a\|^2$  (kies zelf een slimme volgorde van deze twee deelopgaven!).
3. Bewijs Proposition III.8.

## Week 7: Compacte operatoren (3 november)

- Bewijs Proposition IV.1 in de syllabus vanuit de lineaire algebra (dus niet met de methode in de syllabus).
  - Neem  $a : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  linear en bewijs dat de functie  $f \mapsto \|af\|^2$  van  $\mathbb{C}^n$  naar  $\mathbb{R}^+$  continu is.
  - Bewijs hetzelfde voor  $a : H \rightarrow H$  met  $H$  een Hilbert-ruimte. Gebruik hierbij het volgende criterium voor continuïteit: een functie  $\varphi$  van  $H$  naar  $\mathbb{C}$  (en dus i.h.b. naar  $\mathbb{R}^+$ ) is continu als voor iedere convergente rij  $(f_n)$  in  $H$  met limiet  $f$  (i.e.  $\lim_n \|f_n - f\| = 0$ ) geldt dat  $\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(f)$  in  $\mathbb{C}$ , oftewel  $\lim_n |\varphi(f_n) - \varphi(f)| = 0$ .
  - Stel dat  $a : H \rightarrow H$  compact is en dat  $K \subset H$  een gesloten deelruimte is. Bewijs dat als tevens  $a^* = a$ , dan  $a$  de ruimten  $K$  en  $K^\perp$  is zichzelf afbeeldt en laat zien dat de beperking van  $a$  tot  $K$  ook compact is (en evenzo de beperking van  $a$  tot  $K^\perp$ ).
- Laat zien dat een operator  $a : H \rightarrow H$  met eindig-dimensionaal bereik (i.e.  $\dim(aH) < \infty$ ) compact is.
  - Laat zien dat voor de eigenwaarden  $(\lambda_i)$  van een zelfgeadjungeerde compacte operator geldt:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |\lambda_i| = 0. \quad (10)$$

Neem hierbij aan dat de eigenwaarden geordend zijn zodat  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$

- Bewijs omgekeerd dat een zelfgeadjungeerde operator van de vorm

$$a = \sum_i \lambda_i p_i$$

met alle  $p_i$  eindig-dimensionale projecties (zie syllabus) compact is als (10) geldt.

- Bewijs dat een operator compact is desda deze de norm-limiet van een rij operatoren met eindig-dimensionaal bereik is.

## Week 8: Het spoor (17 november)

- Geef een voorbeeld van een operator  $a$  waarvoor  $\sum_k (e_k, ae_k)$  in de ene basis eindig is en in een andere basis oneindig.
  - Geef in je eigen woorden het wiskundige verband tussen spoorklasse-operatoren in de theorie van Hilbert-ruimten en dichtheidsmatrices c.q. gemengde toestanden in de kwantumtheorie.
  - Zoek in een natuurkundeboek- of dictaat iets dat een dichtheidsmatrix wordt genoemd en ga na of het dat ook echt is in wiskundige zin.
- Deze opgave geeft een alternatieve definitie van het spoor van een operator. Voor  $a : H \rightarrow H$  begrensd definiëren we  $|a| := \sqrt{a^*a}$ , waar de wortel is beschreven in de bonusopgave (je hoeft die niet te maken om te begrijpen wat de wortel betekent). Stel eerst dat  $a \geq 0$  (in de zin dat  $(f, af) \geq 0$  voor alle  $f \in H$ ) en definieer voor een dergelijke  $a$ :

$$\text{Tr}(a) := \sum_k (e_k, ae_k), \quad (11)$$

waar  $(e_k)$  een o.n.b. van  $H$  is.

- Bewijs dat  $\text{Tr}(a)$  onafhankelijk is van de keuze van de o.n.b.
  - Bewijs dat  $\text{Tr}(uau^{-1}) = \text{Tr}(a)$  voor iedere unitaire operator  $u$ .
  - Vanaf nu nemen we niet meer aan dat  $a \geq 0$ . We zeggen voor een willekeurige begrensde operator  $a$  dat  $a \in B_1(H)$ , ofwel dat  $a$  spoorklasse is, als  $\text{Tr}(|a|) < \infty$ .
  - Bewijs dat als  $a \in B_1(H)$ , dan  $\text{Tr}(a)$  zoals gedefinieerd in (11) eindig is en onafhankelijk is van de keuze van de o.n.b.
  - Bewijs dat als  $a \in B_1(H)$  en  $b$  begrensd, dan geldt  $ab \in B_1(H)$  en  $ba \in B_1(H)$ . Hint: bewijs eerst dat  $b$  de som is van vier unitaire operatoren en vervolgens dat als  $u$  unitair is en  $a \in B_1(H)$ , dan  $au \in B_1(H)$  en  $ua \in B_1(H)$ . Neem ten slotte aan (zie bonusopgave) dat als  $a_1 \in B_1(H)$  en  $a_2 \in B_1(H)$ , dan  $a_1 + a_2 \in B_1(H)$  (deze voor de hand liggende eigenschap is in werkelijkheid bijzonder lastig te bewijzen).
- Kies tussen (a) en (b).
    - In deze opgave bewijs je de stelling van de Nederlandse wiskundige C. Visser (1910-2001): *Als  $a : H \rightarrow H$  een begrensde operator is zodat  $a \geq 0$ , dan heeft deze een unieke wortel  $\sqrt{a}$ . Deze wortel is per definitie een begrensde operator op  $H$  met de eigenschappen  $\sqrt{a}^2 = a$  en  $\sqrt{a} \geq 0$ .*

- i. Definieer een reeks polynomen op  $[0, 1]$  door de recursierelatie

$$q_n(t) = \frac{1}{2} (t + q_{n-1}(t)^2)$$

met beginconditie  $q_0 = 0$ . Met de notatie  $q(t) := 1 - \sqrt{1-t}$ , laat zien dat  $q_n \rightarrow q$  uniform. Laat zien dat  $p_n := q_n - q_{n-1}$  een polynomial is met positieve coëfficiënten, en dat  $\sum_n p_n \rightarrow q$  uniform.

- ii. Stel dat  $a \in B(H)$  voldoet aan  $0 \leq a \leq 1$  (iedere positieve  $a$  kan  $\leq 1$  worden gemaakt door te delen door de norm). Toon aan dat  $0 \leq 1 - a \leq 1$ . Bewijs dat  $1 - \sum_n p_n(1 - a)$  uniform convergeert naar een positive operator  $\sqrt{a}$  die voldoet aan  $\sqrt{a}^2 = a$ .
- iii. Laat zien dat  $\sqrt{a}$  de unieke operator met deze eigenschappen is.
- (b) Bewijs dat als  $a_1 \in B_1(H)$  en  $a_2 \in B_1(H)$ , dan  $a_1 + a_2 \in B_1(H)$ .

## Week 9: gesloten operatoren (24 november)

1. Bewijs dat de condities in Definitie VI.2 in de syllabus equivalent zijn.
2. (a) Neem  $H = \ell^2 := \ell^2(\mathbb{N})$  en kies een rij  $\hat{a} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  zodat  $\sup_k \{|\hat{a}(k)|\} = \infty$ . Dit geeft een operator  $a : D(a) \rightarrow \ell^2$  door  $(af)(k) := \hat{a}(k)f(k)$ . Je weet uit Week 5, opgave 2(a), dat  $a$  onbegrensd is, zodat we niet  $D(a) = \ell^2$  kunnen kiezen.
  - i. Bewijs dat  $a$  met de keus  $D(a) = \ell_c$  (i.e. de rijtjes met eindig veel entries ongelijk aan 0) afsluitbaar (closable) is maar niet gesloten.
  - ii. Bewijs dat  $a$  met de alternatieve keus

$$D(a) = \{f \in \ell^2 \mid \hat{a}f \in \ell^2\}$$

gesloten is.

- iii. Bewijs dat de operator in ii de afsluiting (closure) van de operator in i is (zie Definitie VI.3).
- (b) We gaan nu precies hetzelfde in het continuüm doen. Neem  $H = L^2(\Omega)$  voor een gebied  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (als je wilt kies je  $\Omega = \mathbb{R}$  zonder puntenverlies) en kies een continue functie  $\hat{a} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  zodat  $\sup_{x \in \Omega} \{|\hat{a}(x)|\} = \infty$ . Dit geeft een operator  $a : D(a) \rightarrow \ell^2$  door  $(af)(x) := \hat{a}(x)f(x)$ . Ook deze operator is onbegrensd. Als  $\Omega = \mathbb{R}$  kun je denken aan  $\hat{a}(x) = x$ , de plaatsoperator uit de quantum mechanics.
- i. Bewijs dat  $a$  met de keus  $D(a) = C_c(\Omega)$  afsluitbaar is maar niet gesloten.
  - ii. Bewijs dat  $a$  met de alternatieve keus

$$D(a) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \hat{a}f \in L^2(\Omega)\}$$

gesloten is.

- iii. Bewijs dat de operator in ii de afsluiting van de operator in i is.

Hint bij (b): gebruik Theorem II.8. Verder gaat de opgave hetzelfde als (a).

3. Laat  $H = L^2(\mathbb{R})$  neem een willekeurige functie  $\hat{a} \in H$ . Definieer nu een operator  $a$  met  $D(a) = C_c(\mathbb{R})$  and  $(af)(x) := f(0)\hat{a}(x)$  for  $f \in D(a)$ .
  - (a) Bewijs dat  $a$  onbegrensd is.
  - (b) Bewijs dat  $a$  niet afsluitbaar is.

## Week 10: het spectrum (1 december)

- (a) Bekijk nog eens opgave 2b) van week 9. Noem  $a_1$  de vermenigvuldigingsoperator  $a$  met  $D(a_1) = C_c(\Omega)$ , en  $a_2$  dezelfde vermenigvuldigingsoperator (dus  $a f = \hat{a} \cdot f$ )

met

$$D(a_2) = \{f \in L^2(\Omega) \mid \hat{a}f \in L^2(\Omega)\}.$$

Stel dat  $\hat{a}$  reëelwaardig is. Bewijs dat  $a_1^* = a_2$  en dat  $a_2^* = a_2$ . Met andere woorden,  $a_1$  is symmetrisch (en zelfs essentieel zelfgeadjungeerd) met afsluiting  $a_2$ , en  $a_2$  is zelfgeadjungeerd.

- (b) Stel dat  $a$  afsluitbaar is. Bewijs dat  $a^* = a^{**}$  desda  $a^* = a^-$ .

2. We gaan verder met de vorige opgave (al hoef je die niet in te leveren). Stel nog steeds dat  $\hat{a}$  reëelwaardig is. Je hebt aangetoond dat  $a_2$  zelfgeadjungeerd is en nu ga je het spectrum ervan berekenen. Mocht je opgave 1 helemaal niet hebben bekeken:  $a_2$  is de operator van  $D(a_2) \subset L^2(\Omega)$  als boven naar  $L^2(\Omega)$ , gedefinieerd door  $a_2 f = \hat{a} \cdot f$  voor een zekere functie  $\hat{a} \in C(\Omega)$ . Ook hier geldt, net als vorige week: als je wilt kies je  $\Omega = \mathbb{R}$  zonder puntenverlies.

- (a) Bewijs dat de operator  $a_2$  injectief is desda  $\hat{a}(x) \neq 0$  voor bijna alle waarden van  $x \in \Omega$  (i.e. buiten een verzameling van maat 0).

- (b) Bewijs dat  $a_2$  surjectief is desda er een  $\varepsilon > 0$  is, zodanig dat  $|\hat{a}(x)| \geq \varepsilon$  voor bijna alle waarden van  $x \in \Omega$ .

- (c) Combineer (a) en (b) met het closed graph theorem om aan te tonen: als  $a_2$  surjectief is, dan is hij ook injectief is met begrensde inverse.

- (d) Concludeer met behulp van (c) en de definitie van het spectrum dat  $\sigma(a_2) = \hat{a}(\Omega)^-$ , waarbij  $\hat{a}(\Omega) := \{\hat{a}(x), x \in \Omega\}$ . Het streepje boven  $\hat{a}(\Omega)$  betekente dat je de afsluiting in  $\mathbb{R}$  neemt.

3. Geef met behulp van een goed boek een volledig bewijs van het *closed graph theorem*. Suggesties: G.K. Pedersen, *Analysis Now* (Springer, New York, 1989 and 1995), M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis* (Academic Press, San Diego, 1980).

## Week 11: het spectrum II (8 december)

- Bereken het spectrum van de eenheidsoperator.
  - Geef zonder verder te lezen het bewijs van Lemma VII.7.
  - Schrijf het bewijs van Lemma VII.10 in de syllabus uit.
  - Geef het bewijs van Lemma VII.11.
- Ga de relevante definities na en laat daaruit zien hoe de tweede helft van Theorem VII.12 uit de eerste helft volgt.
  - Bewijs Corollary VII.13. Dit kun je doen door goed het bewijs van Theorem VII.6 te bestuderen.
- Kijk in een of meer van de boeken [5, 8, 18, 21, 24, 27] en geef het domein waarop de Hamiltoniaan van een elektron in een Coulombpotentiaal zelfgeadjungeerd is. Geef ook het domein waarop de Hamiltoniaan van het waterstofatoom zelfgeadjungeerd is.

## Week 12: Stelling van Stone (15 december)

1. Laat zien dat  $(u(t)\psi)(x) := \psi(x-t)$  op  $H = L^2(\mathbb{R})$  voldoet aan de axioma's in Definitie VII.16 van een van  $\mathbb{R}$  in de syllabus.
2. Geef de weggelaten details in het bewijs in de syllabus van Deel 1 van de Stelling van Stone:
  - (a) Bewijs dat  $\psi_n \in D(h)$  voor alle  $\psi \in H$ ;
  - (b) Bewijs dat  $\psi_n \rightarrow \psi$  voor alle  $\psi \in H$ ;
  - (c) Bewijs dat  $R(h+i) = H$ .
  - (d) Bewijs (VII.26), bijvoorbeeld door (VII.28) aan te tonen en dan in te koppelen.
3. Kies uit de volgende opgaven:
  - (a) Bewijs met behulp van de Stelling van Stone en de Fourier-transformatie dat de plaatsoperator  $\hat{x}$  in de kwantummechanica zelfgeadjungeerd is op het domein  $D(\hat{x}) \subset L^2(\mathbb{R})$ , met
$$D(\hat{x}) := \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid x\psi \in L^2(\mathbb{R})\}. \quad (12)$$
  - (b) Bewijs de Stelling van Stone (Theorem VII.17) voor het geval dat  $h$  begrensd is.

## Week 13: Spectraalmaten (22 december)

1. (a) Leid de eigenschappen 1 en 2 van de kansmaat  $B \mapsto P(B)$  in Definitie VIII.2 af uit Definitie VIII.1 en (VIII.20).  
(b) Schrijf de bewijzen in de syllabus van Lemma's VIII.4, 5 en 6 geheel uit.
2. (a) Leid (VIII.7), (VIII.13), en (VIII.15-16) af uit de definitie (VIII.8) van  $p$  en de details van deze definitie in sectie VIII.2.  
(b) Bewijs (VIII.38).
3. Kies uit:
  - (a) Bewijs Proposition VIII.9.
  - (b) Zoek Lemma VIII.3 op in een analyseboek en geef een volledig bewijs.