Tentamen	**Lineaire Algebra 3**	5 april 2004
Examenzaal		9.00–12.00

1. In $V = \mathbf{Q}^3$ is van de afbeelding f gegeven dat ten opzichte van de standaardbasis het beeld van de vectoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectievelijk

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

is.

(i) Omdat $b_3 = -b_1 - b_2 + 2b_4$ moet ook $f(b_3) = f(b_1) - f(b_2) + 2f(b_3)$ en dus $x = 1$.

(ii) In het nieuwe dictaat heet de matrix die we zoeken ${}^{\mathcal{E}}M_f^{\mathcal{E}}$; de kolommen zijn de beelden van de standaardbasisvectoren, die je moet schrijven als lineaire combinaties van de b_i. Je vindt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) We moeten bepalen: ${}^{\mathcal{B}}M_{\text{id}}^{\mathcal{E}}$. Eigenlijk is de inverse ${}^{\mathcal{E}}M_{\text{id}}^{\mathcal{B}}$ al gegeven omdat de b_i uitgedrukt zijn op de standaardbasis. Dus

$${}^{\mathcal{B}}M_{\text{id}}^{\mathcal{E}} = \left({}^{\mathcal{E}}M_{\text{id}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iv) Omdat

$${}^{\mathcal{B}}M_f^{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{B}}M_{\text{id}}^{\mathcal{E}} \cdot {}^{\mathcal{E}}M_f^{\mathcal{E}} \cdot {}^{\mathcal{E}}M_{\text{id}}^{\mathcal{B}}$$

krijgen we

$${}^{\mathcal{B}}M_f^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Check: inderdaad is $f(b_1) = 2b_2 + b_3$, etc.

2. Geef voor elk van de volgende beweringen een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(i) Dit is waar: het beeld is een deelruimte van W en heeft dus dimensie $\leq \dim W$, en het heeft dimensie $\leq \dim V$ op grond van de dimensiestelling (of, simpelweg omdat het beeld wordt opgespannen door de $\dim V$ beelden van de basisvectoren van V).

(ii) Niet waar: de vereniging van de x-as en van de y-as in $\mathbf{R}^2$ is geen lineaire ruimte omdat de som van de basisvectoren e_1 en e_2 niet in de vereniging zit (het punt $(1,1)$ zit er niet in).

(iii) $\mathbf{Z}$ is commutatieve ring zonder nuldelers, maar geen lichaam

(iv) De polynomen x en $-x$ zijn irreducibel in $\mathbf{Q}[x]$ maar er bestaan geen s,t met $s \cdot x + t \cdot (-x) = 1$ in $\mathbf{Q}[x]$; dus niet waar. (Dit behoort niet tot de stof in 2005.)

(v) De ring $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ heeft nuldelers $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$ en is dus geen lichaam.

3. De stof waarover deze opgave gaat behoort in 2005 niet tot de stof voor het tentamen Lineaire Algebra 3. In plaats daarvan zal er waarschijnlijk een opgave over codes komen!

4. Laat V de $\mathbf{F}_3$-vectorruimte zijn van polynomen in $\mathbf{F}_3[x]$. Laat D de afbeelding zijn die aan een $f \in \mathbf{F}_3[x]$ de afgeleide $f' \in \mathbf{F}_3[x]$ toevoegt, gedefinieerd door

$$D(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}.$$

(i) Df zit weer in V (omdat een geheel getal maal een element uit $\mathbf{F}_3$ weer een element van $\mathbf{F}_3$ geeft en de afgeleide dus weer een polynoom in $\mathbf{F}_3[x]$ is); de lineariteit schrijf je simpelweg uit:

$$D(f+g) = D(\sum (a_i + b_i)x^i) = \sum i(a_i + b_i)x^{i-1} = \sum i a_i x^{i-1} + \sum i b_i x^{i-1}$$

en dat is $D(f) + D(g)$ voor alle $f, g \in \mathbf{F}_3[x]$; en

$$D(\lambda f) = D(\sum (\lambda a_i) x^i = \sum i \lambda a_i x^{i-1} == \lambda \sum i a_i x^{i-1} = \lambda D(f),$$

voor alle $f \in \mathbf{F}_3[x]$ en alle $\lambda \in \mathbf{F}_3$.

(ii) Een element van $\mathbf{F}_3[x]$ zit in de kern dan en slechts dan als $D(f) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} = 0$ in $\mathbf{F}_3[x]$, dat wil zeggen, als $i a_i = 0$ voor $i = 1, 2, \ldots n$. Maar $i a_i = 0$ in het lichaam $\mathbf{F}_3$ dan en slechts dan als $i = 0$ of $a_i = 0$ in dat lichaam. Dus precies die polynomen in $\mathbf{F}_3[x]$ waarvoor alle $a_i = 0 \in \mathbf{F}_3$ voor $i = 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11 \cdots$ zitten in de kern, met andere woorden de polynomen van de vorm $a_0 + a_3 x^3 + a_6 x^6 + \cdots a_n x^n$ met $n = 3k$ voor zekere $k \geq 0$ zitten in de kern. Een basis bestaat dan bijvoorbeeld uit $1, x^3, x^6, \ldots$.

(iii) Twee nevenklassen $v_1 + K$ en $v_2 + K$ zijn hetzelfde dan en slechts dan als $v_1 - v_2$ in K zit, dus van de vorm $\sum_{j=0}^{k} a_{3j} x^{3j}$ is. Een eerste nevenklasse van K bestaat uit $0 + K = K$. Het is duidelijk dat $x + K$, en $x^2 + K$, en $x^4 + K$, en $x^5 + K$ etc, andere, en verschillende, nevenklassen geven, terwijl elke $v + K \in V/K$ te schrijven is als $\mathbf{F}_3$-lineaire combinatie van K, $x + K$, $x^2 + K$, $x^4 + K$, etc., die dus een basis vormen voor Q over $\mathbf{F}_3$.