Tentamen	**Lineaire Algebra 3**	5 april 2004
Examenzaal		9.00–12.00

1. In $V = \mathbf{Q}^3$ is van de afbeelding f gegeven dat ten opzichte van de standaardbasis het beeld van de vectoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectievelijk

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

is.

(i) Bepaal alle waarden van x waarvoor f een lineaire transformatie van V is.

(ii) Bepaal de matrix $M_f^{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ van f ten opzichte van de standaardbasis $\mathcal{E}$ (wanneer f lineair is).

(iii) Bepaal de matrix $M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ die een coördinatenvector gegeven ten opzichte van de standaardbasis weergeeft op de basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$.

(iv) Bepaal de matrix $M_f^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ van f ten opzichte van de standaardbasis $\mathcal{E}$ (wanneer f lineair is).

2. Geef voor elk van de volgende beweringen een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(i) Als V een eindig-dimensionale vectorruimte is en ϕ een lineaire afbeelding van V naar een vectorruimte W, dan is de dimensie van het beeld $\mathrm{Im}\phi$ van V onder ϕ kleiner dan of gelijk aan de dimensie van V en ook kleiner dan of gelijk aan de dimensie van W: $\dim \mathrm{Im}\phi \leq \dim V$, en $\dim \mathrm{Im}\phi \leq \dim W$.

(ii) Als U en W lineaire deelruimten zijn van een vectorruimte V, dan vormt de vereniging $U \cup W$ ook een lineaire deelruimte van V.

(iii) Een commutatieve ring zonder nuldelers is een lichaam.

(iv) Als f en g verschillende irreducibele polynomen zijn met coëfficiënten in een lichaam K, dan bestaan er polynomen $s, t \in K[x]$ met $s \cdot f + t \cdot g = 1$.

(v) De ring $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ is een lichaam van 6 elementen.

3. Laten de polynomen $f = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$ en $g = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 1$ uit $\mathbf{Q}[x]$ gegeven zijn.

(i) Bewijs dat de monische grootste gemene deler van f en g in $\mathbf{Q}[x]$ het polynoom $h = x + \frac{1}{2}$ is.

(ii) Ontbind f en g volledig in irreducibele factoren over $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ en $\mathbf{C}$.

(iii) Laten $\bar{f}$ en $\bar{g}$ de polynomen uit $\mathbf{F}_7[x]$ zijn verkregen door de coëfficiënten van f en g modulo 7 te nemen (en $1/2$ te interpreteren als 2^{-1}). Ontbind $\bar{f}$ en $\bar{g}$ volledig in irreducibele factoren in $\mathbf{F}_7[x]$.

(iv) Bewijs de volgende bewering: als $p \in \mathbf{Q}[x]$ monisch is en $\bar{p} \in \mathbf{F}_7[x]$ is als in (iii) uit p verkregen, dan is p irreducibel (in $\mathbf{Q}[x]$) wanneer $\bar{p}$ dat is (in $\mathbf{F}_7[x]$).

(v) Laat door middel van een tegenvoorbeeld zien dat de omkering van (iv) onjuist is.

4. Laat V de $\mathbf{F}_3$-vectorruimte zijn van polynomen in $\mathbf{F}_3[x]$. Laat D de afbeelding zijn die aan een $f \in \mathbf{F}_3[x]$ de afgeleide $f' \in \mathbf{F}_3[x]$ toevoegt, gedefinieerd door

$$D(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}.$$

(i) Laat zien dat D een lineaire transformatie van V is.

(ii) Beschrijf de kern K van D, en geef een basis voor K.

(iii) Beschouw de vectorruimte $Q = V/K$ bestaande uit de nevenklassen $v + K$ van K, voor $v \in V$. Geef een basis voor Q als $\mathbf{F}_3$-vectorruimte aan.