**VI-1.** In de volgende onderdelen zijn steeds twee bases $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$ voor $\mathbf{Q}^2$ gegeven, Bepaal in alle gevallen de matrix ${}^{\mathcal{C}}M_{\text{id}}^{\mathcal{B}}$, die een vector gegeven door coordinaten ten opzichte van basis $\mathcal{B}$ schrijft in coordinaten ten opzichte van $\mathcal{C}$, en ook de matrix ${}^{\mathcal{B}}M_{\text{id}}^{\mathcal{C}}$.

(i)

$$\mathcal{B} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right], \quad \mathcal{C} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right].$$

(ii)

$$\mathcal{B} = \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right], \quad \mathcal{C} = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

(iii)

$$\mathcal{B} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \quad \mathcal{C} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

(iv)

$$\mathcal{B} = \left[\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right], \quad \mathcal{C} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

**VI-2.** Laat $V$ de vectorruimte $\text{Mat}_{2\times 2}(\mathbf{Q})$ van 2 bij 2 matrices over $\mathbf{Q}$ zijn, en laat de standaardbasis $\mathcal{E}$ bestaan uit de elementaire matrices (met een 1 op één plaats en elders 0-en).

(i) Bepaal ${}^{\mathcal{B}}M_{\text{id}}^{\mathcal{E}}$ als $\mathcal{B}$ de basis voor $V$ is bestaande uit

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right].$$

(ii) Bepaal ${}^{\mathcal{B}}M_{\text{id}}^{\mathcal{C}}$, als $\mathcal{C}$ de basis voor $V$ is bestaande uit

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right],$$

en controleer je antwoord door te kijken naar de som van de vectoren uit $\mathcal{C}$.

**VI-3.** [ **Uitwendig product** en **normaalvergelijking** ]
Laat een vlak $V$ in $\mathbf{R}^3$ gegeven zijn door de vectorvergelijking $\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{q} + \mu\vec{r}$, voor onafhankelijke vectoren $\vec{q}$ en $\vec{r}$ in $\mathbf{R}^3$, met $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Met $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ geven we het standaardinproduct van $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{R}^3$ aan.

(i) Laat zien dat als $\vec{n}$ loodrecht op $\vec{q}$ en op $\vec{r}$ staat (dus $\langle \vec{n}, \vec{q} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{r} \rangle = 0$) dat dan $\vec{n}$ loodrecht op $\vec{x} - \vec{p}$ staat voor elke vector $\vec{x}$ met eindpunt in het vlak $V$.

(ii) Laat omgekeerd zien dat, wanneer $\vec{n}$ loodrecht op $\vec{x} - \vec{p}$ staat voor elke vector $\vec{x}$ met eindpunt in het vlak $V$, wel moet gelden dat $\vec{n}$ loodrecht op $\vec{q}$ en op $\vec{r}$ staat.

(iii) Laat zien dat de vector $\vec{q} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} q_2r_3 - q_3r_2 \\ -q_1r_3 + q_3r_1 \\ q_1r_2 - q_2r_1 \end{pmatrix}$, die het *uitwendig product* of *uitproduct* of *vector product* van $\vec{q}$ en $\vec{r}$ heet, loodrecht staat op $\vec{q}$ en $\vec{r}$.

(iv) Leid uit het voorgaande af dat de coördinaten van alle $\vec{x}$ met eindpunt in $V$ voldoen aan:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & q_1 & r_1 \\ x_2 & q_2 & r_2 \\ x_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix}.$$

Deze lineaire vergelijking heet wel een *normaalvergelijking* voor het vlak.

(iv) Geef een normaalvergelijking voor het vlak door de punten $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, -1, 1)$ en $C = (1, 1, 1)$.

**VI-4.** [ **Uitwendig product** (vervolg) ]
Laat $\vec{a} \times \vec{b}$ het uitwendig product van $\vec{a}$ en $\vec{b}$ zijn als gegeven in Opgave VI-2.

(i) Bewijs dat over elk lichaam van karakteristiek ongelijk aan 2 uit de eigenschap van determinanten dat verwisseling van twee verschillende kolommen van een vierkante matrix resulteert in vermenigvuldiging van de determinant met $-1$ volgt dat de determinant nul is wanneer twee kolommen hetzelfde zijn.

(ii) Laat zien dat voor elk drietal vectoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ uit $\mathbf{R}^3$ geldt dat

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

(iii) Gebruik (ii) en de eigenschappen van determinanten om te laten zien dat $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, voor elk tweetal vectoren $\vec{a}, \vec{b}$ uit $\mathbf{R}^3$.

(iv) Idem voor de eigenschappen $\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$ en $\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = 0$.

(v) Bewijs dat $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$.

(vi) Gebruik (v) en de eigenschap $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos\phi$, waar $\phi$ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is, om te laten zien dat $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\phi$.