

Een *relatie* \sim op een verzameling V wordt gedefinieerd door een deelverzameling R van $V \times V$, bestaande uit de elementen $(v, w) \in V \times V$ waarvoor $v \sim w$; we zeggen dan dat v in relatie \sim tot w staat. Voor alle paren die niet in R zitten geldt $v \not\sim w$. Een voorbeeld is de relatie \leq op \mathbf{Z} .

Een *equivalentierelatie* op een verzameling V is een relatie \sim op V zodanig dat voor alle $u, v, w \in V$ geldt: $u \sim u$ (reflexiviteit), en $v \sim u$ als $u \sim v$ (symmetrie), en $u \sim w$ als $u \sim v$ en $v \sim w$ (transitiviteit). Een equivalentierelatie splitst V op in (disjuncte) equivalentieklassen.

II-1. De elementen van de restklassenring $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ zijn de restklassen $\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}$.

- (i) Maak een opteltabel en een vermenigvuldigtabel voor $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$. (De rijen en kolommen van de tabel corresponderen met de verschillende elementen van $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, en op plaats i, j staat de som, resp. het product van \bar{i} en \bar{j} in $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.)
- (ii) Geef aan hoe je uit deze tabellen ziet of een element eenheid is en of een element nuldeeler is.
- (iii) Gebruik (ii) om deze vraag te beantwoorden: welke van de vier ringen uit (i) vormen een lichaam?
- (iv) Laat zien dat de relatie

$$x \sim y \iff x \equiv y \pmod{m}$$

(dus $\bar{x} = \bar{y}$) een equivalentierelatie op \mathbf{Z} is.

II-2. In de volgende onderdelen is $R = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ de ring van restklassen modulo 2, die dus alleen uit $\bar{0}, \bar{1}$ bestaat.

- (i) Hoeveel verschillende elementen heeft $M_2(R)$, de ring van 2×2 matrices met coëfficiënten uit R ?
- (ii) Wat is het element 0 in $M_2(R)$ en wat is het element 1 (uit de definitie van lichaam, ring enz.)?
- (iii) Vind een element ongelijk aan 0 in $M_2(R)$ dat geen eenheid is.
- (iv) Vind een element ongelijk aan 1 in $M_2(R)$ dat een eenheid is.
- (v) Vind twee elementen r, s in $M_2(R)$ met $r \times s = 0$ maar $s \times r \neq 0$.

II-3. Laat $S[x]$ de polynoomring zijn met $S = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$: de elementen zijn dus polynomen met coëfficiënten in $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$. Vind een polynoom f van graad 2 en een polynoom g van graad 3 in $S[x]$ met $f \times g = 0$, en vind ook twee polynomen $p, q \in S[x]$ van graad minstens 1 met $p \times q = x + 2 \in S[x]$.

II-4. [**Breukenlichaam**].

Laat R met $+$ en \times een ring (commutatief met 1) zonder nuldelers zijn. We definiëren een equivalentierelatie \sim op de verzameling $V = \{(r, s) : r, s \in R, s \neq 0\}$ als volgt:

$$(r_1, s_1) \sim (r_2, s_2) \iff r_1 \times s_2 = r_2 \times s_1.$$

We geven de equivalentieklasse van elementen uit V waar (t, n) in zit meestal aan met $\frac{t}{n}$. Op deze klassen kunnen we een optelling definiëren door

$$\frac{t_1}{n_1} + \frac{t_2}{n_2} = \frac{t_1 \times n_2 + t_2 \times n_1}{n_1 \times n_2},$$

en een vermenigvuldiging door

$$\frac{t_1}{n_1} \times \frac{t_2}{n_2} = \frac{t_1 \times t_2}{n_1 \times n_2}.$$

- (i) Wanneer $R = \mathbf{Z}$, waaruit bestaat dan de verzameling elementen van V die equivalent zijn met $(0, 1)$, en waaruit de equivalentieklassen van $(1, 1)$ en van $(3, -1)$?
 - (ii) Laat zien dat voor $R = \mathbf{Z}$ bij elke equivalentieklasse een tegengestelde bestaat, en, als het niet de klasse $\frac{0}{1}$ is, ook een inverse.
 - (iii) Als nu $R = \mathbf{Q}[x]$, beantwoord dan dezelfde vragen uit (i) en (ii).
- De constructie in deze opgave maakt het *breukenlichaam* bij een domein.