- verwisseling van twee verschillende rijen (of kolommen) van A tot vermenigvuldiging van $\det A$ met -1 leidt;
- vermenigvuldiging van een rij (of kolom) van A met een scalar λ tot vermenigvuldiging van $\det A$ met λ leidt;
- het optellen van een veelvoud van een rij (of kolom) van A bij een andere rij (of kolom) $\det A$ ongemoeid laat.

Omdat ook geldt: $\det AB = \det A \cdot \det B$ voor elk tweetal $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$, hebben we dat A inverteerbaar is dan en slechts dan als $\det A \neq 0$, en dan is $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$; bovendien is, als A inverteerbaar is

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}A = \frac{1}{\det A}\left((-1)^{i+j}\det A_{(i,j)}\right)^{\mathrm{T}},$$

waar de *geadjungeerde* $\mathrm{adj}A$ van $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ gedefinieerd is als de matrix in $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$ met op plaats i, j de cofactor $(-1)^{j+i}\det A_{(j,i)}$. Let op dat dit de i, j-de cofactor van de *getransponeerde* van A is!

1.4.8 Toepassing: Regel van Cramer

De regel van Cramer geeft over elk lichaam de unieke oplossing van een stelsel van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden wanneer deze bestaat. Laat namelijk de vergelijkingen gegeven zijn door $A \cdot x = b$, waar $b \in K^n$ een kolomvector is en A een $n \times n$ matrix met coëfficiënten uit K. Dan heeft dit stelsel een unieke oplossing $x \in \mathbb{R}^n$ dan en slechts dan wanneer $\det A \neq 0$, en die oplossing wordt gegeven door $x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$, waar A_k de matrix is waarin de k-de kolom van A is vervangen door de vector b.

Alhoewel dit een elegante formulering geeft, is deze methode aanzienlijk omslachtiger in de praktijk dan het bepalen van de oplossing van het stelsel door middel van vegen.

Opgave 47. *Laat zien dat als R een commutatieve ring met 1 is, een element $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(R)$ inverteerbaar is als $\det R$ inverteerbaar is in R.*

Opgave 48. *Laten f en g lineaire afbeeldingen zijn tussen K-vectorruimten V en W. Bewijs dat geldt: $f = g$ dan en slechts dan als $f(v) = g(v)$ voor alle $v \in V$ dan en slechts dan als $f(b) = g(b)$ voor elke b in een basis voor V.*

Opgave 49. *Geef een isomorfisme tussen $K[x]^{(n)}$ en K^{n+1}.*

Opgave 50. *Laat zien dat de afbeelding d die aan $f \in K[x]$ diens afgeleide f' toevoegt een lineaire transformatie van $K[x]$ is. Kies een basis $\mathcal{B}$ voor $K[x]$ en bepaal de matrix $M_{d^2}^{\mathcal{B}}$. Bepaal ook een basis voor de kern en voor het beeld van d^2.*