1.4 Lineaire Afbeeldingen

Ook voor lineaire afbeeldingen herhalen we de belangrijkste definities en stellingen uit het reële geval in de algemenere context van vectorruimten over een willekeurig lichaam K.

1.4.1 Definities

Een K*-lineaire afbeelding* tussen K-vectorruimten V en W is een afbeelding $f\colon V \to W$ die voldoet aan

(i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ voor alle $v_1, v_2 \in V$;
(ii) $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ voor alle $v \in V$ en $\lambda \in K$.

Als $V = W$ dan heet een K-lineaire afbeelding ook wel een *(lineaire) transformatie* of een *endomorfisme*. Als $W = K$ (de K-vectorruimte van dimensie 1) dan heet een K-lineaire afbeelding ook wel een *lineaire functionaal*. Een *isomorfisme (van vectorruimten)* is een K-lineaire afbeelding die tevens bijectie is; als er een isomorfisme tussen V en W bestaat heten ze *isomorf*: $V \cong W$ (precieser: K-isomorf, notatie $V \cong_K W$). In het speciale geval dat $W = V$ heet zo'n isomorfisme een *automorfisme*.

Opgave 40. *Is draaiing over $\pi/4$ een $\mathbb{Q}$-lineaire afbeelding op de deelruimte $\mathbb{Q}^2$ van $\mathbb{R}^2$?*

Opgave 41. *Bewijs dat een K-lineaire afbeelding f van V naar W een isomorfisme is dan en slechts dan als er een K-lineaire afbeelding g van W naar V bestaat met $g \circ f = \mathrm{id}_V$ en $f \circ g = \mathrm{id}_W$. Deze g heet de inverse van f, en noteren we met $g = f^{-1}$, en f heet dan ook wel inverteerbaar.*

Opgave 42. *Laat zien dat $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ niet isomorf zijn (als $\mathbb{R}$-vectorruimte). Geldt $\mathbb{Q} \cong_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$?*

Opgave 43. *Geef een isomorfisme tussen $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ en K^{mn}.*

1.4.2 Opmerkingen

Net als in het reële geval volgt onmiddellijk uit de definitie dat voor K-lineaire afbeelding geldt dat voor elk natuurlijk getal n

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n),$$

als $v_i \in V$ en $\lambda_i \in K$ voor $1 \leq i \leq n$, dus f is echt lineair.

Onder isomorfismen worden belangrijke lineaire eigenschappen behouden, zoals (on)afhankelijkheid.

Als twee K-vectorruimten dezelfde eindige dimensie n hebben, dan zijn ze isomorf: een isomorfisme wordt gegeven door de elementen van de basis van de één naar die van de ander af te beelden. Beide zijn dus isomorf met K^n.

Bij een lineaire afbeelding $f\colon V \to W$ horen twee lineaire deelruimten, namelijk de *kern* $\mathrm{Ker}(f) \subset V$ en het *beeld* $\mathrm{Im}(f) \subset W$. Dan is f surjectief dan en slechts dan als $\mathrm{Im} f = W$, en injectief dan en slechts dan als $\mathrm{Ker} f = \{0\}$. Ook de volgende stelling geldt weer.

1.4.3 Stelling

Als $f\colon V \to W$ een K-lineaire afbeelding is, en V is eindig-dimensionaal, dan zijn ook $\mathrm{Ker}(f)$ *en* $\mathrm{Im}(f)$ *dat, en bovendien is*

$$\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim V.$$

Opgave 44. *Geef een isomorfisme van $\mathbb{Q}$-vectorruimten tussen $\mathbb{Q}[x]$ en $\mathbb{Q}[\pi]$. Zijn $\mathbb{R}[x]$ en $\mathbb{R}[\pi]$ ook isomorf? Wat is de dimensie van $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-vectorruimte?*

Opgave 45. *Geldt $K^\infty \cong_K K[x]$?*

1.4.4 Matrices

Net als in het reële geval kunnen we K-lineaire afbeeldingen tussen eindig-dimensionale K-vectorruimten altijd representeren met behulp van matrices; daarvoor is het nodig dat we een basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ voor V kiezen en een basis $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_m\}$ voor W. Dan kunnen we $f\colon V \to W$ geven door middel van de matrix

$$M_f = {}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m\times n}(K),$$

die aangeeft wat het beeld w (als coördinatenvector ten opzichte van de basis $\mathcal{C}$) is van een vector v (gegeven als coördinatenvector ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$), namelijk

$$M_f(v) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = w.$$

De matrix M_f is dus sterk afhankelijk van de keuze van de bases $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$. De kolommen van de matrix ${}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}}$ bestaan uit beelden van de basisvectoren $f(b_1), \ldots, f(b_n)$, uitgedrukt op de basis $\mathcal{C}$.

Het samenstellen van lineaire afbeeldingen $h = g \circ f$ waar $f\colon V \to W$ en $g\colon W \to X$, correspondeert met het vermenigvuldigen van de bijbehorende matrices: $M_h = M_g M_f$, waarbij we dan wel moeten zorgen dat f en g gegeven worden ten opzichte van *dezelfde* basis $\mathcal{C}$ voor W:

$${}^{\mathcal{D}}M_h^{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{D}}M_g^{\mathcal{C}} \cdot {}^{\mathcal{C}}M_f^{\mathcal{B}}.$$

Een transformatie f van V is *inverteerbaar* als er een *inverse* transformatie f^{-1} van V bestaat met de eigenschap dat $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_V$, de identieke afbeelding op V. Voor eindig-dimensionale vectorruimten is dat equivalent met de eis dat M_f een inverteerbare matrix is, en dan is $M_{f^{-1}} = M_f^{-1}$.

Laat V nu eindig-dimensionaal met basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ zijn, en f een lineaire transformatie van V die inverteerbaar is. Dan geeft f een automorfisme van V, en vormen de beelden $\{f(b_1), \ldots, f(b_n)\}$ ook weer een basis van V. De matrix ${}^{\mathcal{B}}M_f^{\mathcal{B}}$ heeft in de i-de kolom de coördinatenvector van het beeld $f(b_i)$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$. Nemen we als nieuwe basis $\mathcal{C}$ voor V de vectoren $c_i = f(b_i)$, dan kunnen we de matrix met in de i-de kolom de coördinaten van $f(b_i) = c_i$ op basis $\mathcal{B}$ natuurlijk ook interpreteren als de matrix van de afbeelding die c_i geschreven op basis $\mathcal{C}$ stuurt naar c_i geschreven op basis $\mathcal{B}$. Met andere woorden,

$${}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{C}} = {}^{\mathcal{B}}M_f^{\mathcal{B}}.$$

Maar dan is de matrix die de b_i op basis $\mathcal{C}$ schrijft ook gemakkelijk te vinden:

$${}^{\mathcal{C}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{B}} = \left({}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = \left({}^{\mathcal{B}}M_f^{\mathcal{B}}\right)^{-1}.$$

De matrices ${}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{C}}$ en ${}^{\mathcal{C}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{B}}$ zijn van groot belang; ze geven *coördinatentransformaties*. Als een vector v gegeven is op basis $\mathcal{B}$, dan is ${}^{\mathcal{C}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{B}}(v)$ dezelfde vector maar dan uitgeschreven op de basis $\mathcal{C}$. Meestal is de matrix ${}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{C}}$ gemakkelijk te vinden (omdat de kolommen de coördinaten van de nieuwe basisvectoren op de oorspronkelijke basis $\mathcal{B}$ zijn) terwijl je de inverse matrix ${}^{\mathcal{C}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{B}}$ wilt gebruiken om een vector op de nieuwe basis te schrijven.

1.4.5 Voorbeeld

We doen een eenvoudig voorbeeld in $\mathbb{R}^3$. Laat $\mathcal{B}$ de standaardbasis zijn, ten opzichte waarvan de vector v gegeven is. Gevraagd is om de vector v uit te drukken op een nieuwe basis $\mathcal{C}$, als bijvoorbeeld

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Omdat de vectoren c_1, c_2, c_3 hier een mooie 'diagonaalvorm' hebben, kun je het juist antwoord direct aflezen: $v = 3c_3 - c_2 - 4c_1$. In het algemeen is dat niet zo eenvoudig, maar volgt het antwoord uit

$${}^{\mathcal{C}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{B}}(v) = \left({}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}(v),$$

waar ${}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{C}}$ als kolommen c_1, c_2, c_3 op basis $\mathcal{B}$ heeft. Hier dus:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

hetgeen overeenkomt met wat we al zagen.

Laat Φ nu de matrix ${}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{C}}$ zijn. Dan zijn we in staat om van een lineaire transformatie g van V gegeven ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$, ook de matrix van g ten opzichte van de nieuwe basis $\mathcal{C}$ te bepalen. Immers, om g ten opzichte van $\mathcal{C}$ te bepalen kunnen we eerst vectoren herschrijven van $\mathcal{C}$ naar $\mathcal{B}$, dan de g ten opzichte van $\mathcal{B}$ nemen en tenslotte weer teruggaan naar de basis $\mathcal{C}$. Dus:

$${}^{\mathcal{C}}M_{g}^{\mathcal{C}} = \Phi^{-1} \cdot {}^{\mathcal{B}}M_{g}^{\mathcal{B}} \cdot \Phi.$$

Matrices $A, B \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ waarvoor een inverteerbare $C \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ bestaat zodat $A = C^{-1} \cdot B \cdot C$ heten *geconjugeerd* (met elkaar, in $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$). Het belangrijkste thema van de volgende hoofdstukken zal zijn om een met A geconjugeerde matrix te vinden die prettigere eigenschappen heeft dan A zelf, met andere woorden, om door overgang op een andere basis een mooiere matrix voor een gegeven afbeelding te vinden.

Opgave 46. *Laat zien dat 'geconjugeerd zijn' een equivalentierelatie op $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$ definieert.*

1.4.6 Voorbeeld

We geven een toepassing in $V = \mathbb{R}^2$, namelijk om de matrix M_ℓ te bepalen, ten opzichte van de standaardbasis, van de lineaire afbeelding ℓ die een gegeven vector spiegelt in de lijn $y = 3x$. Laten we een speciale basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ kiezen voor $\mathbb{R}^2$, en wel zo dat de eerste basisvector b_1 op ℓ ligt, en de tweede er loodrecht op staat. Dus, bijvoorbeeld,

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De matrix ${}^{\mathcal{B}}M_\ell^{\mathcal{B}}$ voor spiegeling in de lijn $y = 3x$ ten opzichte van de basis $\mathcal{B}$ voor $\mathbb{R}^2$ is eenvoudig, immers het beeld van b_1 (die op ℓ ligt) is b_1 zelf, en van b_2 (die loodrecht op ℓ staat) wordt het spiegelbeeld $-b_2$; met andere woorden:

$$ {}^{\mathcal{B}}M_\ell^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. $$

Volgens het bovenstaande is

$$ {}^{\mathcal{E}}M_\ell^{\mathcal{E}} = \Phi^{-1} \cdot {}^{\mathcal{B}}M_\ell^{\mathcal{B}} \cdot \Phi, $$

waar $\Phi = {}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{E}}$ aangeeft hoe e_i in $\mathcal{B}$ uit te drukken. Nu is

$$ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{-3}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}b_1 + \frac{-3}{10}b_2, $$

$$ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{10}b_1 + \frac{1}{10}b_2, $$

dus

$$ {}^{\mathcal{B}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{E}} = \Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}, $$

$$ {}^{\mathcal{E}}M_{\mathrm{id}}^{\mathcal{B}} = \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, $$

zodat

$$ {}^{\mathcal{E}}M_\ell^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{-3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-8}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{8}{10} \end{pmatrix}. $$

In dit geval was het gemakkelijk om Φ^{-1} op te schrijven, en moesten we moeite doen om Φ te vinden.

1.4.7 Determinant

Tot slot van deze sectie vatten we eigenschappen van de determinant samen. Deze eigenschappen kunnen voor een willekeurig lichaam K geheel analoog aan het geval $K = \mathbb{R}$ afgeleid worden; de determinant wordt dan gedefinieerd als de unieke alternerende multilineaire afbeelding op $\mathrm{M}_{n\times n}(K)$ die waarde 1 heeft op de eenheidsmatrix I_n.

We definiëren de *cofactor* van A_{ij} door $(-1)^{i+j} \det A_{(i,j)}$, waar $A_{(i,j)}$ de $(n-1)\times(n-1)$-matrix is bestaande uit A waaruit de i-de rij en de j-de kolom zijn weggelaten.

Dan geldt in de eerste plaats (en dit kan zelfs als definitie voor de determinant genomen worden) dat:

(1) $\det(A) = A_{11}$ als $A \in \mathrm{M}_{1\times 1}(K)$;
(2) $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}$ als $A \in \mathrm{M}_{2\times 2}(K)$;
(n) $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} \det A_{(i,j)}$ als $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$ en $1 \le j \le n$.

Hier kan deze *ontwikkeling naar de j-de kolom* ook vervangen worden door de *ontwikkeling naar de i-de rij*:

(n') $\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} A_{ik} \det A_{(i,k)}$ met $1 \le i \le n$.

In het bijzonder geldt voor een *bovendriehoeksmatrix* (waarin onder de hoofddiagonaal allemaal nullen staan) en voor een *benedendriehoeksmatrix* (alemaal nullen boven de diagonaal) dat $\det A = \prod_{i=1}^n A_{ii}$.

Ook geldt voor elke A dat de determinant gelijk is aan de determinant van zijn getransponeerde (verkregen door te spiegelen in de hoofddiagonaal), dus $\det A = \det A^{\mathrm{T}}$. Uit multilineariteit volgt ook dat: