1.2 Vectorruimten

Nu zijn we in staat definities en stellingen uit **Lineaire Algebra 1** en **2** te generaliseren.

1.2.1 Definitie

Zij K een lichaam. Een K-*vectorruimte* is een verzameling V met een bewerking $+$ en een afbeelding die aan elk paar $(\lambda, v) \in K \times V$ een element $\lambda v \in V$ toevoegt, die voldoen aan:

[V1] de operatie $+$ op V is associatief: $(u + v) + w = u + (v + w)$, voor alle $u, v, w \in V$;
[V2] er is een (nul)element $0 \in V$ zodanig dat $0 + v = v + 0 = v$ voor alle $v \in V$;
[V3] bij elke $v \in V$ is er een *tegengestelde* $-v \in V$ zodanig dat $v + (-v) = (-v) + v = 0$;
[V4] de operatie $+$ op V is commutatief: $v + w = w + v$ voor alle $v, w \in V$;
[V5] $1v = v$ voor alle $v \in V$;
[V6] $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ voor alle $\lambda \in K$ en $v, w \in V$;
[V7] $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ voor alle $\lambda, \mu \in K$ en $v \in V$;
[V8] $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ voor alle $\lambda, \mu \in K$ en $v \in V$.

1.2.2 Opmerkingen

Vergeet niet dat de eis dat $+$ een bewerking is oplegt dat

[V0] $v_1 + v_2 \in V$ voor alle $v_1, v_2 \in V$.

Een afbeelding $K \times V \to V$, voor een lichaam K en een verzameling V, die aan $V[5-8]$ voldoet wordt een *scalaire vermenigvuldiging* genoemd. Kort samengevat kunnen we dan zeggen dat een K-vectorruimte niets anders is dan een additieve groep $(V, +)$ met daarop een scalaire vermenigvuldiging gedefinieerd. De elementen van K heten *scalairen*, die van V *vectoren*. Merk op dat bij een vectorruimte dus een lichaam hoort waaruit de scalairen komen. In **Lineaire Algebra 1** werd onder vectorruimte het speciale geval van $\mathbb{R}$-vectorruimte of *reële vectorruimte* verstaan. Het is ook mogelijk een struktuur analoog aan een vectorruimte maar dan algemener over een ring te definiëren, een zogenaamd *R-moduul*.

1.2.3 Voorbeelden

(i) Uit **Lineaire Algebra 1** ken je de ruimte $\mathbb{R}^n$ bestaande uit n-tallen reële getallen (geschreven als *rij*vector of *kolom*vector) met de coördinaatsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging. Net zo is de verzameling van alle rijtjes van n elementen uit een lichaam K een K-vectorruimte, die we met K^n aangeven (voor $n \geq 1$). Per definitie is $K^0 = \{0\}$.

(ii) De verzameling van *oneindige rijtjes* elementen $x_1, x_2, \ldots$ van K is een K-vectorruimte onder coördinaatsgewijze optelling en vermenigvuldiging, die we met K^∞ aangeven.

(iii) Laat $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ voor een lichaam K en positieve gehele getallen m, n de verzameling van $m \times n$ matrices met coëfficiënten in K zijn. Dan is $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ een K-vectorruimte (onder optelling), als de scalaire vermenigvuldiging λM eruit bestaat elke coëfficiënt met λ te vermenigvuldigen.

(iv) De verzameling van elementen van $K[x]$ vormt met optelling en scalaire vermenigvuldiging $\lambda(a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0) = (\lambda a_m)x^m + \cdots + (\lambda a_1)x + \lambda a_0$ een K-vectorruimte.

(v) Voor een willekeurige verzameling S vormt de verzameling van afbeeldingen $\phi : S \to K$ naar een lichaam K een vectorruimte als we optelling definiëren door $(\phi_1 + \phi_2)(s) = \phi_1(s) + \phi_2(s)$ voor $s \in S$, en scalaire vermenigvuldiging door $(\lambda\phi)(s) = \lambda \cdot \phi(s)$ voor $s \in S$, $\lambda \in K$. We geven die ruimte wel aan met K^S. Merk op dat met $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ we K^n

vinden, dat $K^{\mathbb{N}} = K^\infty$ en dat $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ hetzelfde is als K^S voor $S = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$.

(vi) Met $K = \mathbb{R}$ en I een open interval van $\mathbb{R}$ is $K^S = \mathbb{R}^I$ de vectorruimte van *reëelwaardige functies* op I. Leggen we op dat de functies k-maal continu differentieerbaar zijn, dan geven we die ruimte wel met $\mathcal{C}^{(k)}(I)$ aan. Zo bestaat $\mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R})$ uit de continue functies.

Opgave 21. *Laat zien dat $\mathbb{R}^n$ een $\mathbb{Q}$-vectorruimte is. Is $\mathbb{C}^n$ een $\mathbb{R}$-vectorruimte? En is $\mathbb{Q}^n$ een $\mathbb{R}$-vectorruimte?*

1.2.4 Definitie

Een *K-lineaire deelruimte* van een K-vectorruimte V is een deelverzameling $U \subset V$ met de eigenschap dat:

(i) $0 \in U$;

(ii) $u_1 + u_2 \in U$ voor alle $u_1, u_2 \in U$;

(iii) $\lambda u \in U$ voor elke $\lambda \in K$ en $u \in U$.

1.2.5 Opmerkingen

Net als in het reële geval geldt hier weer dat de naam K-lineaire deelruimte terecht suggereert dat het een deelverzameling $U \subset V$ is die met de van V *geërfde* optelling en scalaire vermenigvuldiging zelf een K-vectorruimte vormt.

In veel van de definities laten we de toevoeging K- wel weg als het onbelangrijk is, of duidelijk uit de context om welk lichaam het gaat.

Opgave 22. *Laat zien dat de eerste voorwaarde uit 1.2.4 gemist kan worden mits we eisen dat U niet-leeg is; laat door twee voorbeelden zien dat geen van beide andere voorwaarden gemist kan worden.*

Opgave 23. *Laat zien dat de convergente rijtjes $y_1, y_2, \ldots$ een lineaire deelruimte vormen van $\mathbb{R}^\infty$.*

1.2.6 Definities

Een *K-lineaire combinatie* van elementen $v_1, \ldots, v_k$ uit een K-vectorruimte V is een element $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \in V$, waar $\lambda_i \in K$. Het *K-opspansel* van $v_1, \ldots, v_k$ is de verzameling van alle K-lineaire combinaties van $v_1, \ldots, v_k$:

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K\}.$$

Een *volledig stelsel* (of ook wel *opspannend stelsel*) vectoren voor een vectorruimte V is een verzameling $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subset V$ zodat $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$; we zeggen dat de v_i de ruimte *V opspannen (over K)*. Een *K-basis* voor een vectorruimte V is een volledig stelsel dat bovendien *onafhankelijk* is over K; hier heet $v_1, v_2, \ldots, v_k$ een onafhankelijk stelsel over K als voor $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ geldt:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Een stelsel dat niet onafhankelijk is heet natuurlijk *afhankelijk*. Op grond van de onderstaande stelling kunnen we voor de *dimensie* $\dim V$ van een vectorruimte $V \neq \{0\}$ het maximale aantal n van onafhankelijke vectoren in V nemen als zo'n eindig getal n bestaat; als dat niet bestaat is de dimensie *oneindig*. De nulruimte $\{0\}$ heeft per definitie dimensie 0.

Zodra een basis $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ voor een K-vectorruimte is gekozen, kan elk element $v \in V$ op unieke manier gerepresenteerd worden door een *coördinatenvector* $v = (v_1, \ldots, v_n)_{\mathcal{B}} \in K^n$, namelijk zo dat

$$v = v_1 b_1 + \cdots + v_n b_n.$$

1.2.7 Opmerkingen

Eigenlijk is het beter om een basis niet als verzameling te definiëren, want de *volgorde* doet er wel degelijk toe (voor de coördinatenvector bijvoorbeeld)! (Zie ook de opgave na 1.4.14.)

Misschien vraag je je nu af wat $\mathbb{Q}[x]$ eigenlijk is — in de vorige sectie zagen we dat $\mathbb{Q}[x]$ een commutatieve ring was, en nu wordt opgemerkt dat $\mathbb{Q}[x]$ een $\mathbb{Q}$-vectorruimte is. Het antwoord is: beide. Voor de vectorruimtestruktuur van $\mathbb{Q}[x]$ kijken we naar optelling van elementen van $\mathbb{Q}[x]$ en naar vermenigvuldiging van elementen van $\mathbb{Q}[x]$ met scalairen, dat wil hier zeggen: elementen van $\mathbb{Q}$. Voor de struktuur van $\mathbb{Q}[x]$ als ring moeten we elementen van $\mathbb{Q}[x]$ vermenigvuldigen met elementen van $\mathbb{Q}[x]$, niet alleen van $\mathbb{Q}$. Met andere woorden: $\mathbb{Q}[x]$ is een vectorruimte, die nog meer struktuur heeft omdat je twee elementen ook nog met elkaar kunt vermenigvuldigen. Vatten we $\mathbb{Q}[x]$ als vectorruimte op dan vergeten we die multiplicatieve struktuur.

1.2.8 Stelling [Hoofdstelling van de Lineaire Algebra]

Als er een K-basis van de K-vectorruimte V is die uit $n > 0$ elementen bestaat, dan heeft elke K-basis van V precies n elementen.

1.2.9 Stelling

Zij V een vectorruimte en $n \geq 1$. Als $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ een volledig stelsel vormen, is elk stelsel $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset V$ met $m > n$ afhankelijk.

De bewijzen van deze twee stellingen in **Lineaire Algebra 1** voor het geval $K = \mathbb{R}$ blijken op een enkel detail na (lees K in plaats van $\mathbb{R}$) ook in het algemene geval te gelden: de laatste stelling bewijs je door te laten zien dat een homogeen stelsel van n vergelijkingen in m onbekenden altijd een oplossing heeft (in K) die niet de nul-oplossing is. Dan bewijs je de Hoofdstelling door te laten zien dat $\#\mathcal{B}_1 \leq \#\mathcal{B}_2$ en $\#\mathcal{B}_2 \leq \#\mathcal{B}_1$ als $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{B}_2$ allebei bases voor V zijn, en dus moet $\#\mathcal{B}_1 = \#\mathcal{B}_2$.

1.2.10 Voorbeelden

(i) De dimensie van K^n is n, en K^∞ heeft oneindige dimensie. De *standaardbasis* $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ van K^n bestaat uit de vectoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) $\mathrm{M}_{m\times n}(K)$ is een vectorruimte van dimensie mn.

Opgave 24. *Is het over een willekeurig lichaam waar dat een homogeen stelsel van n vergelijkingen in m onbekenden (met $m > n$) oneindig veel oplossingen heeft?*

Opgave 25. *Bewijs dat een homogeen stelsel van n vergelijkingen in m onbekenden over $\mathbb{Z}$ altijd oplossingen in $\mathbb{Z}$ heeft. Is het waar dat er altijd oneindig veel oplossingen in $\mathbb{Z}$ zijn als $m > n$?*

Opgave 26. *Laat zien dat $\mathbb{Q}[x]$ een oneindig-dimensionale $\mathbb{Q}$-vectorruimte vormt, door voor elke $n > 0$ een onafhankelijk stelsel van n elementen uit $\mathbb{Q}[x]$ aan te geven.*

1.2.11 Stelling

Elke lineaire deelruimte U van een eindig-dimensionale vectorruimte V is eindig-dimensionaal, en er geldt $\dim U \leq \dim V$.

Ook het bewijs van deze stelling verloopt precies zo als voor het speciale geval $K = \mathbb{R}$: bewijs eerst een lemma.

1.2.12 Lemma

Als $\{v_1, \ldots, v_n\}$ een onafhankelijk stelsel vormen in de vectorruimte V, en $w \in V \setminus \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, dan is $\{v_1, \ldots, v_n, w\}$ onafhankelijk.

Vervolgens laat je zien dat een maximaal onafhankelijk stelsel in $U \subset V$ ten hoogste $n = \dim V$ elementen kan bevatten. Ook dat gaat over een willekeurig lichaam.

Opgave 27. *Het bewijs van het lemma over $\mathbb{R}$ gebruikte dat met $a_i, a \in \mathbb{R}$:*

$$a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n + av = 0 \quad \Rightarrow \quad v = b_1 u_1 + \cdots + b_n u_n,$$

met $b_i \in \mathbb{R}$. Laat met een voorbeeld zien dat dit niet waar is als je eist dat $a_i, a, b_i \in \mathbb{Z}$.

1.2.13 Gevolgen

In een eindig-dimensionale vectorruimte is elk onafhankelijk stelsel aan te vullen tot een basis, en is elk volledig stelsel uit te dunnen tot een basis.

Opgave 28. *Bewijs dat (voor elke $n \geq 1$ en elk lichaam K) de diagonaalmatrices (met alleen niet-nul elementen toegestaan op de diagonaal) een lineaire deelruimte van $\mathrm{M}_{n \times n}(K)$ vormen. Bepaal de dimensie van deze ruimte en geef een basis.*

Opgave 29. *Laat zien dat W_1 en W_2 lineaire deelruimten van $\mathbb{Q}^5$ zijn en W_3 niet; bepaal ook de dimensie en een basis voor W_1 en W_2. Hier is $W_1 = \{\ (a, b, c, d, e) \in \mathbb{Q}^5 \mid a + b = c + d\ \}$, en $W_2 = \{\ (a, b, c, d, e) \in \mathbb{Q}^5 \mid a = b = c \text{ en } a + d + e = 0\ \}$, en $W_3 = \{\ (a, b, c, d, e) \in \mathbb{Q}^5 \mid a^2 = b + 1\ \}$.*

Opgave 30. *Bewijs dat de doorsnede van twee lineaire deelruimten van een K-vectorruimte V weer een lineaire deelruimte van V is. Laat zien dat zelfs geldt dat $\cap_{i \in I} W_i$ een lineaire deelruimte van V is als alle W_i dat zijn, voor $i \in I$.*

Opgave 31. *Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de vereniging van twee lineaire deelruimten van een K-vectorruimte V niet weer een lineaire deelruimte van V hoeft te zijn. Bewijs dat zelfs geldt voor lineaire deelruimten W_1, W_2 van V dat: $W_1 \cup W_2$ is een lineaire deelruimte van V dan en slechts dan als $W_1 \subset W_2$ of $W_2 \subset W_1$.*

Opgave 32. *Laat zien dat voor elk lichaam K en elk geheel getal $n \geq 0$ de deelverzameling $\{\ f \in K[x] \mid \deg f \leq n\ \}$ een lineaire deelruimte is van $K[x]$; deze ruimte zullen we wel met $K[x]^{(n)}$ aangeven. Bepaal de dimensie van $K[x]^{(n)}$ en geef een basis.*